Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Ασκήσεις 3ου και 4ου Κεφαλαίου

Διδάσκων: Μιχάλης Ξένος,
email : *mxenos@cc.uoi.gr*

11 Δεκεμβρίου 2014

1. Να δείξετε ότι η πεπλεγμένη μέθοδος του τραπεζίου με μητρώο:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

έχει τάξη ακρίβειας δύο.

2. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 10y(t)\left(1 - \dfrac{y(t)}{1000}\right), \quad t \in [0,\, 2], \\ y(0) = 100. \end{cases} \tag{1}$$

Να υλοποιηθεί υπολογιστικό πρόγραμμα που να χρησιμοποιεί τη μέθοδο των Runge-Kutta τέταρτης τάξης στα σημεία $t^n = t^0 + nh$, $n = 1, 2, ...$ με βήμα $h = 0.1$. Να εξετάσετε πώς αυτή η προσεγγιστική λύση προσεγγίζει την ακριβή λύση του προβλήματος. Να αναπαραστήσετε γραφικά την αναλυτική λύση και τη προσεγγιστική λύση με την μέθοδο των Runge-Kutta τέταρτης τάξης και να τη συγκρίνετε με τη μέθοδο του Euler για το βήμα h.

Υπόδειξη: Δείτε επίσης την άσκηση 6 του φυλλαδίου ασκήσεων 2ου Κεφαλαίου.

3. Θεωρούμε τα $\zeta^{n,i}$ όπως ορίστηκαν στην (3.29) του βιβλίου *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Αποδείξτε, για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$
\begin{cases} y' = f(y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ y(\alpha) = y_0, \end{cases} \tag{2}
$$

υπό τις προϋποθέσεις ότι η f είναι αρκετά ομαλή στο $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$, και ότι η ίδια και κατάλληλες μερικές παράγωγοι της είναι φραγμένες, ότι:

$$
\max_{n,i} \left| y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i} \right| \leq Ch,
$$

και

$$
\max_{n} \left| y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i} \right| \leq Ch^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i, \quad i = 1, ..., q.
$$

4. Είναι η μέθοδος των Runge-Kutta που περιγράφεται από το μητρώο:

$$
\begin{array}{ccc|c}
\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} &
\end{array}
$$

συνεπής και γιατί;

5. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$
\begin{cases} y' = y \cos t, \quad t \in [0,\, 10], \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3}
$$

Να υλοποιηθεί υπολογιστικό πρόγραμμα που να προσεγγίζει αριθμητικά το παραπάνω πρόβλημα με τις μεθόδους του Euler, τη μέθοδο του μέσου και τη κλασική μέθοδο των Runge-Kutta (RK τέταρτης τάξης) χρησιμοποιώντας βήματα $h = 0.1$, 0.15 και 0.2. Να υπολογίσετε το σφάλμα, $\varepsilon = \left| y(t^N) - y^N \right|$, για $t^N = 10$ καθώς και το συνολικό πλήθος υπολογισμών της f για κάθε μέθοδο και για τα διαφορετικά βήματα h. Να γίνει γραφική παράσταση του σφάλματος ε για $t = 10$ ως προς το πλήθος των υπολογισμών της f για τα διαφορετικά βήματα h, και για τις τρείς μεθόδους (Euler, μέσου, RK τέταρτης τάξης).

Υπόδειξη: Δείτε επίσης το παράδειγμα 3.1 του βιβλίου *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, σελ. 110.

6. Αποδείξτε ότι η μέθοδος Runge-Kutta-Radau με μητρώο:

$$
\begin{array}{cc|c}
\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\
\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\
\hline
\frac{3}{4} & \frac{1}{4} &
\end{array}
$$

είναι αλγεβρικά ευσταθής.

7. Να βρεθεί η περιοχή απόλυτης ευστάθειας των Runge-Kutta μεθόδων με τάξη ακρίβειας 1, 2, 3 και 4 των οποίων το πλήθος των συναρτησιακών υπολογισμών συμπίπτει με την τάξη της μεθόδου. Να εκτιμήστε τις αντίστοιχες περιοχές απόλυτης ευστάθειας, S.

Υπόδειξη: Δείτε επίσης την σελ. 153 του βιβλίου *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*.

8. Θεωρήστε τη μέθοδο Runge-Kutta τρίτης τάξης:

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + \dfrac{h}{2} f(t^n, y^n), \\ y^{n,2} = y^n + \dfrac{3h}{4} f\left(t^n + \dfrac{h}{2}, y^{n,1}\right), \\ y^{n+1} = y^n + \dfrac{h}{9}\left[2f(t^n, y^n) + 3f\left(t^n + \dfrac{h}{2}, y^{n,1}\right) + 4f\left(t^n + \dfrac{3h}{4}, y^{n,2}\right)\right]. \end{cases} \tag{4}$$

Να δείξετε ότι αν η μέθοδος Runge-Kutta της (4) εφαρμοστεί στο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = y, \quad t \in [0,\, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{5}$$

τότε μπορεί να γραφεί στη μορφή: $y^{n+1} = \left(1 + h + \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{6}\right)^{n+1}$.

9. (α) Δώστε τις εκφράσεις ∇y^{n+3}, $\nabla^2 y^{n+3}$ και $\nabla^3 y^{n+3}$.
(β) Με χρήση του ερωτήματος (α) και της μεθόδου:

$$\begin{cases} y^0, y^1, ..., y^{k-1}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+k} = h f^{n+k}, \quad n = 0, ..., N-k, \end{cases} \tag{6}$$

να γράψετε τη μέθοδο *ανάδρομων διαφορών με 3 βήματα* που προκύπτει.

10. Προσδιορίστε τα α_0, α_1, α_2, ώστε η διβηματική μέθοδος:

$$\alpha_2 y^{n+2} + \alpha_1 y^{n+1} + \alpha_0 y^n = h f^{n+2} \tag{7}$$

να έχει τάξη ακρίβειας δύο. Είναι η μέθοδος που προκύπτει ευσταθής;

Οι ασκήσεις μπορούν να επιστραφούν και μέσω email (mxenos@cc.uoi.gr) μέχρι την ημέρα εξέτασης του μαθήματος.

Βιβλιογραφία:

Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Γ.Δ. Ακρίβης, Β.Α. Δουγαλής, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2η έκδοση, 2013.

Αριθμητική Ανάλυση: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Μ.Ν. Βραχάτης, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.